Numerické riešenie Poissonovej rovnice
Sústava s tridiagonálnou maticou

Počítajme rovnicu v tvare

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} = -2. \tag{1}$$

s okrajovými podmienkami

$$\phi(-1) = 0, \qquad \phi(1) = 0. \tag{2}$$

na intervale $x \in <-1, 1>$. Jedná sa o jednorozmernú, stacionárnu verziu Poissonovej rovnice $\nabla^2\phi = -f(x)$. Analytické riešenie rovnice má tvar:

$$\phi(x) = 1 - x^2. \tag{3}$$

Vyskúšame riešiť metódu numericky aproximovaním druhej derivácie:

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} = -2 = \frac{\phi(x+h) - 2\phi(x) + \phi(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h). \tag{4}$$

Nekonečne krátky krok dx z derivácie sme nahradili konečne krátkym krokom h. Metóda aproximácie derivácie je prvého rádu.
Z rovnice vyjadrime hodnotu

$$\phi(x) = 0,5\phi(x+h) + 0,5\phi(x-h) + h^2. \tag{5}$$

Položme teraz na ukážku hodnotu $h := 0,5$ (v praxi by sme použili menšie časové kroky, ktoré by nám aproximovali spojitosť). Hodnotu $\phi(-1) = 0$ poznáme z okrajovej podmienky. Keďže máme časový krok s veľkosťou h, tak ďalšiu hodnotu ϕ budeme aproximovať v bode $x = -1 + h = -0,5$, ďalej v bode $x = -0,5 + h = 0$, a napokon v $x = 0 + h = 0,5$:

$$\phi(-0,5) = 0,5\phi(0) + 0,5\phi(-1) + h^2, \tag{6}$$

$$\phi(0) = 0,5\phi(0,5) + 0,5\phi(-0,5) + h^2, \tag{7}$$

$$\phi(0,5) = 0,5\phi(1) + 0,5\phi(0,5) + h^2. \tag{8}$$

Okrajovú hodnotu $\phi(1) = 0$ opäť poznáme. Označme teraz $\phi_1 := \phi(-0,5)$, $\phi_2 := \phi(0)$, $\phi_3 := \phi(0,5)$. Dostávame

$$\phi_1 - 0,5\phi_2 = h^2, \tag{9}$$

$$-0,5\phi_1 + \phi_2 - 0,5\phi_3 = h^2, \tag{10}$$

$$-0,5\phi_2 + \phi_3 = h^2. \tag{11}$$

Keďže $h^2 = 0,5^2 = 0,25$, dostávame

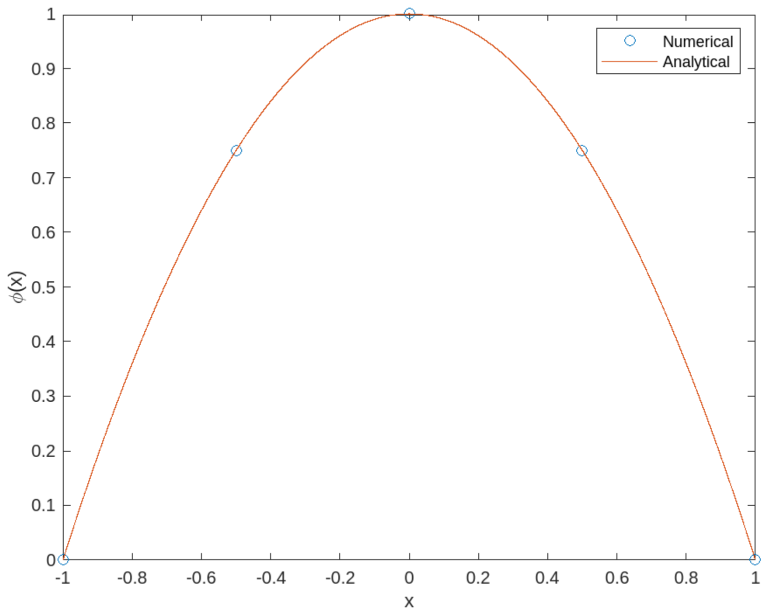
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.5 & 0 & 0,25 \\ -0,5 & 1 & -0,5 & 0,25 \\ 0 & -0,5 & 1 & 0,25 \end{array}\right). \tag{12}$$

Vidíme, že úloha viedla na riešenie sústavy s tridiagonálnou maticou. V prípade kroku $h = 0,5$ sme interval $< -1, 1 >$ rozdelili na 4 intervaly $< -1; -0,5 >$, $< -0,5; 0 >$, $< 0; 0,5 >$, $< 0,5; 1 >$. Pre $n + 1$ intervalov by sme riešili sústavu s maticou s veľkosťou $n \times n$:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -0.5 & 0 & ... & ... & 0 & 0,25 \\ -0,5 & 1 & -0,5 & 0 & ... & 0 & 0,25 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & -0,5 & 1 & -0,5 & 0,25 \\ 0 & 0 & ... & 0 & -0,5 & 1 & 0,25 \end{array}\right). \tag{13}$$

Takto by vyzeralo riešenie v Matlabe pre maticu s veľkosťou 3x3:

```
clear all;
close all;
x0    = -1;
xn    = 1;
n     = 3;
h     = (xn-x0)/(n+1);

a     = [0,-0.5,-0.5];
b     = [1,1,1];
c     = [-0.5,-0.5,0];
d     = [h*h;h*h;h*h];

for k =2:n
     mult =  a(k)/b(k-1);
     b(k) = b(k)-c(k-1)*mult;
     d(k) = d(k)-d(k-1)*mult;
end

phi(n) = d(n)/b(n);
for k=n-1:-1:1
     phi(k)= (-c(k)*phi(k+1)+d(k))/b(k);
end

x   = -1:h:1;
phi = [0,phi,0];

plot(x,phi,'o')
hold on;
x   = -1:0.0001:1;
plot(x,1-x.*x)
legend('Numerical','Analytical')
xlabel('x')
ylabel('\phi(x)')
```



A takto pre maticu so všeobecným n (v kóde je použitý príklad $n = 100$):

```
clear all;
close all;
x0    = -1;
xn    = 1;
n     = 100;
h     = (xn-x0)/(n+1);

a     = -0.5*ones(n,1);
a(1)  = NaN;
c     = -0.5*ones(n,1);
c(n)  = NaN;
b     = ones(n,1);
d     = ones(n,1)*h*h;
phi   = NaN(1,n);


for k =2:n
    mult =  a(k)/b(k-1);
    b(k) = b(k)-c(k-1)*mult;
    d(k) = d(k)-d(k-1)*mult;
end

phi(n) = d(n)/b(n);
for k=n-1:-1:1
    phi(k)= (-c(k)*phi(k+1)+d(k))/b(k);
end
```

```
x   = -1:h:1;
phi = [0,phi,0];

plot(x,phi,'o')
hold on;
plot(x,1-x.*x)
legend('Numerical','Analytical')
xlabel('x')
ylabel('\phi(x)')
```