LU dekompozícia - doplnkový materiál

Pripomeňme si, že pri riešení sústavy lineárnych rovníc LU metódou rozkladáme štvorcovú regulárnu maticu $\mathbf{A}$ na dolnú trojuholníkovú maticu $\mathbf{L}$ a hornú trojuholníkovú maticu $\mathbf{U}$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Pri LU rozklade regulárnej matice $\mathbf{A}$ sa nemože stať to, že by sa na diagonále $\mathbf{U}$ vyskytli nuly. Je to preto, že platí vzťah

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{L}) \cdot \det(\mathbf{U}) = \prod_{j=1}^{n} u_{jj}. \tag{1}$$

Ten plynie z toho, že $\mathbf{L}$ a $\mathbf{U}$ sú matice trojuholníkové, teda ich determinant je rovný súčinu diagonálnych prvkov. Matica $\mathbf{L}$ má na diagonále samé jedničky - teda determinant $\mathbf{A}$ závisí iba na diagonálnych prvkoch $\mathbf{U}$. Keby sa vyskytli na diagonále $\mathbf{U}$ nuly, znamenalo by to, že matica $\mathbf{A}$ je singulárna a teda nemá jedno jednoznačné riešenie (lebo jej determinant je 0).

V počítači sa ale može stať, že sa pri počítaní vyskytne na diagonále nula, predovšetkým kvoli zaokrúhľovacím chybám pri odčítaní podobne veľkých čísel. To sa rieši práve pivotingom.

Matlab vie urobiť pomocou príkazu *lu* "LU" dekompozíciu pre singulárnu maticu, pričom $\mathbf{L}$ alebo $\mathbf{U}$ bude singulárna matica. Najlepší postup pri použití tohto príkazu je preto asi ten, aby ste si vopred overili, či je matica singulárna, a premysleli, či výsledok počítaný Matlabom dáva zmysel. To platí všeobecne pri použití ľubovoľných metód, ktoré sú už niekde naimplementované.

Príklad na rozklad 3x3 regulárnej matice

Ukážeme si na príklade, ako sa dá rozložiť matica bez toho, aby ste si museli priamo odvodiť vzorce pre prvky $\mathbf{L}$ a $\mathbf{U}$. Majme teda maticu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{L}$ a $\mathbf{U}$ budú mať tvar

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Kľúčom je počítať priebežne prvky matíc $\mathbf{L}$ aj $\mathbf{U}$, pretože na výpočet prvkov $\mathbf{L}$ potrebujeme už niektoré predpočítané prvky $\mathbf{U}$ a opačne. Budeme postupovať nasledovne:

1.riadok L: Je celý vypočítaný.

1.riadok U: Rozpíšeme si vzťahy pre prvky $\mathbf{A}$ v prvom riadku podľa klasického maticového násobenia:

$$a_{11} = l_{11} \cdot u_{11} + l_{12} \cdot u_{21} + l_{13} \cdot u_{31}$$

$$1 = 1 \cdot u_{11} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0$$

$$\implies \boxed{u_{11} = 1}$$

$$a_{12} = l_{11} \cdot u_{12} + l_{12} \cdot u_{22} + l_{13} \cdot u_{32}$$
$$2 = 1 \cdot u_{12} + 0 \cdot u_{22} + 0 \cdot 0$$
$$\implies \boxed{u_{12} = 2}$$

$$a_{13} = l_{11} \cdot u_{13} + l_{12} \cdot u_{23} + l_{13} \cdot u_{33} \tag{2}$$
$$4 = 1 \cdot u_{13} + 0 \cdot u_{23} + 0 \cdot u_{33} \tag{3}$$
$$\implies \boxed{u_{13} = 4}$$

Z prvku a_{11} sme teda dostali prvok u_{11}, z prvku a_{12} prvok u_{12} a z a_{13} prvok u_{13}.

2. riadok L: Rozpíšeme si vzťah pre prvok a_{21} matice **A**, z ktorého dostaneme prvok l_{21} matice **L**, ostatné prvky v druhom riadku **L** poznáme.

$$a_{21} = l_{21} \cdot u_{11} + l_{22} \cdot u_{21} + l_{23} \cdot u_{31} \tag{4}$$
$$3 = l_{21} \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \tag{5}$$
$$\implies \boxed{l_{21} = 3}$$

2. riadok U: Podobne si rozpíšeme vzťahy pre prvky a_{22} a a_{23}:

$$a_{22} = l_{21} \cdot u_{12} + l_{22} \cdot u_{22} + l_{23} \cdot u_{32} \tag{6}$$
$$8 = 3 \cdot 2 + 1 \cdot u_{22} + 0 \cdot 0$$
$$\implies \boxed{u_{22} = 2}$$

$$a_{23} = l_{21} \cdot u_{13} + l_{22} \cdot u_{23} + l_{23} \cdot u_{33}$$
$$14 = 3 \cdot 4 + 1 \cdot u_{23} + 0 \cdot u_{33}$$
$$\implies \boxed{u_{23} = 2}$$

3. riadok L: V 3. riadku matice **L** nám ostáva dopočítať prvky l_{31} a l_{32}.

$$a_{31} = l_{31} \cdot u_{11} + l_{32} \cdot u_{21} + l_{33} \cdot u_{31}$$
$$2 = l_{31} \cdot 1 + l_{32} \cdot 0 + 1 \cdot 0$$
$$\implies \boxed{l_{31} = 2}$$

$$a_{32} = l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot u_{22} + l_{33} \cdot u_{32}$$
$$6 = 2 \cdot 2 + l_{32} \cdot 2 + 1 \cdot 0$$
$$\implies \boxed{l_{32} = 1}$$

3. riadok U: Zostáva nám dopočítať iba u_{33} z vyjadrenia a_{33}:

$$a_{33} = l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + l_{33} \cdot u_{33}$$
$$13 = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot u_{33}$$
$$\implies \boxed{u_{33} = 3}$$

Získali sme teda matice **L** a **U** v tvare:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$