Úlohy na numerické chyby, stabilitu

1. Určite rád metódy aproximácie prvej a druhej derivácie v závislosti na konečne krátkom kroku h

   a)
   $$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

   b)
   $$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \tag{2}$$

   c)
   $$f'(x) \approx \frac{f(x+h/2) - f(x-h/2)}{h} \tag{3}$$

   d)
   $$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \tag{4}$$

   e)
   $$f'(x) \approx \frac{2f(x+h) + 3f(x) - 6f(x-h) + f(x-2h)}{6h} \tag{5}$$

2. Odhadnite relatívnu chybu čísel 1,32483726 a 1,32483357. (Počítajte s tým, že máte k dispozícii len 9 platných cifier). Potom odhadnite relatívnu chybu rozdielu týchto čísel. Ako sa odhad relatívnej chyby rozdielu zmenil oproti pôvodným relatívnym chybám?

3. Vyskúšajte v Matlabe príkaz *realmax('double')*, ktorý Vám určí najväčšie číslo typu *double.* potom toto číslo prenásobte kladnou reálnou konštantou $c > 1$. Čo ste dostali?

4. Vyriešte analyticky diferenciálnu rovnicu

   $$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -v, \tag{6}$$

   s počiatočnou podmienkou $v(0) = 1$. V programe *"stabilita_priklad.m"* sa nachádza numerické riešenie pomocou 2 metód aproximácie derivácie:

   Eulerova metóda

   Nekonečne krátky časový krok dt nahradíme krátkym konečným krokom h:

   $$\frac{v(t+h) - v(t)}{h} = -v(t) \tag{7}$$

   Rýchlosť v čase $t + h$ budeme teda počítať ako

   $$v(t+h) = -v(t)h + v(t) \tag{8}$$

Dvojkroková metóda

Pri dvojkrokovej metóde sa derivácia aproximuje pomocou dvojnásobného kroku $2h$:

$$\frac{v(t+h) - v(t-h)}{2h} = -v(t) \tag{9}$$

Rýchlosť v čase $t + h$ budeme teda počítať ako

$$v(t+h) = -2hv(t) + v(t-h) \tag{10}$$

Namiesto komentárov *%%%DOPLNTE%%%* doplňte výpočty $v(t + h)$ jednotlivými metódami. Program spustite a všimnite si, ako sa mení $v(t)$ s rastúcim t.